

Поляризация реликтового излучения

Курсовая работа студента 218 группы
Данковского Ивана Дмитриевича
Научный руководитель:
член-корр. РАН, доктор физ.-мат. наук,
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Введение

Тензор поляризации $I_{ab} = \langle E_a E_b^* \rangle$

Безразмерный тензор поляризации $P_{ab} = \frac{I_{ab}}{I}$

Связь с параметрами Стокса:

$$P_{ab} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + Q & U - iV \\ U + iV & 1 - Q \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{ab} = P_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab} = \frac{1}{\langle E_a E^a \rangle} \left(\langle E_a E_b \rangle - \frac{1}{2} \langle E_c E^c \rangle g_{ab} \right)$$

- бесследовый тензор; g_{ab} - метрика на сфере

$$\mathcal{P}_{ab} = \{\nabla_a \nabla_b\} \mathcal{P}_E - \{\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c\} \mathcal{P}_B$$

- выражение через скалярный и псевдоскалярный потенциалы

$$\{\nabla_a \nabla_b\} = \frac{1}{2}(\nabla_a \nabla_b + \nabla_b \nabla_a - g_{ab} \Delta) \quad \{\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c\} = \frac{1}{2}(\epsilon_a^c \nabla_b \nabla_c + \epsilon_b^c \nabla_a \nabla_c)$$

$$\mathcal{P}_E(\mathbf{n}) = \sqrt{2} \sum_m \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^E Y_{lm}(\mathbf{n}) \quad \text{- разложение по сферическим функциям}$$

$$\mathcal{P}_B(\mathbf{n}) = \sqrt{2} \sum_m \sqrt{\frac{(l-2)!}{(l+2)!}} a_{lm}^B Y_{lm}(\mathbf{n})$$

Различные корреляторы:

$$C_l^{XY} = \frac{1}{2l+1} \sum_m \langle a_{lm}^X a_{lm}^{Y*} \rangle \quad X, Y = T, E, B$$

Вклад от вторичной ионизации

$$C_l^{EE} = 9\pi\tau_{rei}^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} P_T(k) \left\{ \int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h'(k, \eta) \frac{j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} \right\}^2 \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] - \right. \\ \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_{rei})k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right\}^2 \quad (18)$$

$$\frac{\partial h(k, \eta)}{\partial \eta} = h'(k, \eta) = \frac{-3j_2(k\eta)}{\eta}$$

$P_T(k) = A_T$ - считаем спектр масштабно-инвариантным

Свойства сферических функций Бесселя

$$j_l(x) \approx \frac{\sin(x - \frac{\pi l}{2})}{x}, x \gg l$$

$$j_l(x) \approx \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}} \cos \left(\sqrt{x^2 - \left(l + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(l + \frac{1}{2}\right) \arccos \left(\frac{l + \frac{1}{2}}{x}\right) - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$j_{l+1}(x) + j_{l-1}(x) = \frac{2l+1}{x} j_l(x)$$

Вклад от вторичной ионизации

$$\left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_{rei})k] + \right. \\ \left. + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right\}^2 \approx \left\{ \frac{1}{4} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] - \frac{3}{2} j_l[(\eta_0 - \eta_{rei})k] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \right\}^2 \approx j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \left(\frac{l^2}{(\eta_0 - \eta_{rei})^2 k^2} - 2 \right)^2$$

$$\int_{\eta_r}^{\eta_{rei}} d\eta h'(k, \eta) \frac{j_2[(\eta_{rei} - \eta)k]}{(\eta_{rei} - \eta)^2 k^2} = \frac{\cos(k\eta_{rei})}{4k^2 \eta_{rei}^2}$$

Вклад от вторичной ионизации

$$\begin{aligned} C_l^{EE} &= 9\pi\tau_{rei}^2 A_T \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left(\frac{\cos(k\eta_{rei})}{4k^2\eta_{rei}^2} \right)^2 j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \left(\frac{l^2}{(\eta_0 - \eta_{rei})^2 k^2} - 2 \right)^2 \approx \\ &\approx 9\pi\tau_{rei}^2 A_T \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4k^2\eta_{rei}^2} \right)^2 j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k] \left(\frac{l^2}{(\eta_0 - \eta_{rei})^2 k^2} - 2 \right)^2 \end{aligned}$$

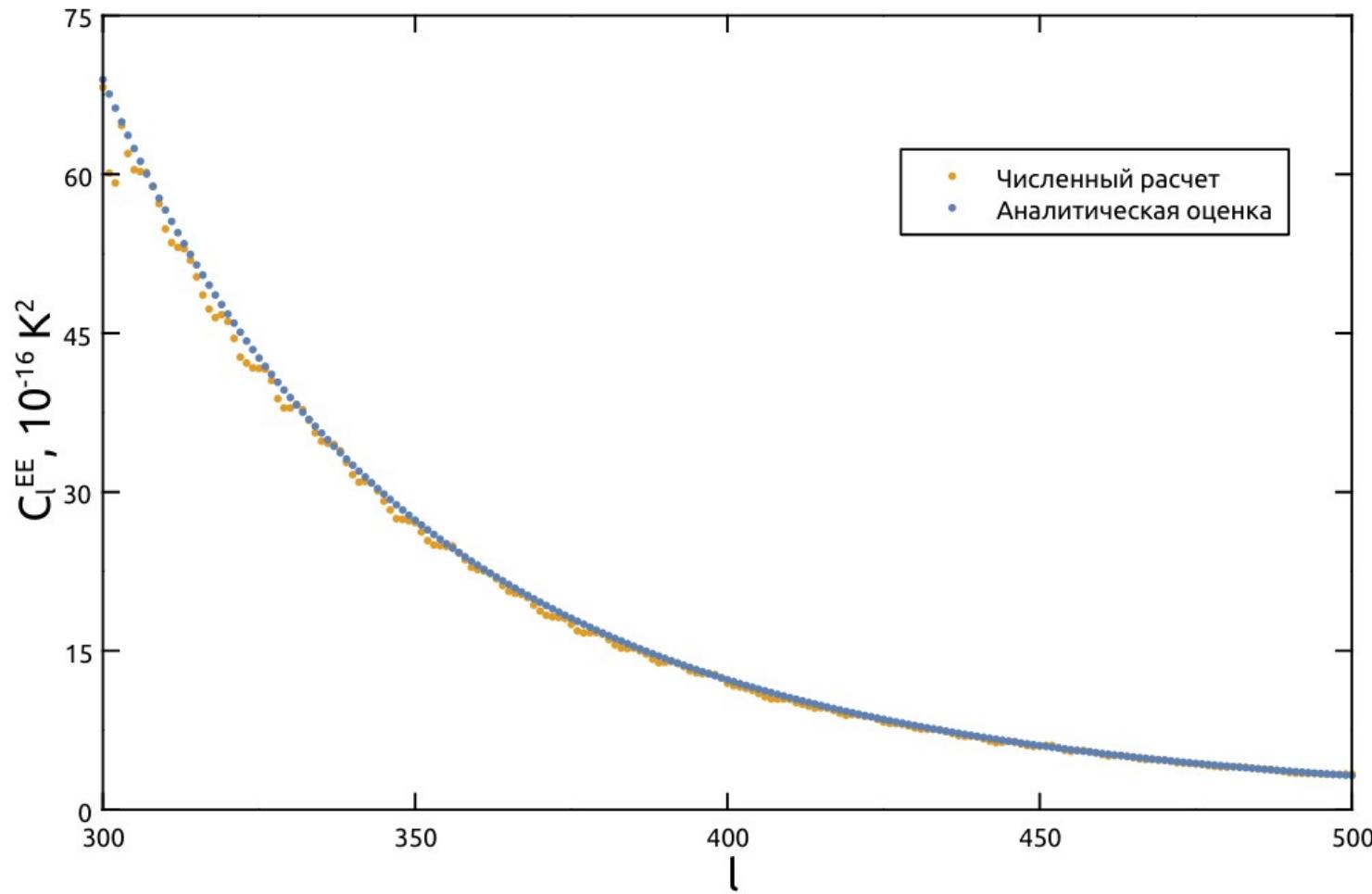
$$j_l^2[(\eta_0 - \eta_{rei})k] = \frac{1}{2k(\eta_0 - \eta_{rei})\sqrt{k^2(\eta_0 - \eta_{rei})^2 - l^2}}$$

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi\tau_{rei}^2}{64\eta_{rei}^4 l^6} (\eta_0 - \eta_{rei})^4 \int_1^\infty \frac{du}{u^6 \sqrt{u^2 - 1}} \left(\frac{1}{u^2} - 2 \right)^2$$

$$C_l^{EE} = \frac{\pi}{10} \tau_{rei}^2 \left(\frac{\eta_0 - \eta_{rei}}{\eta_{rei}} \right)^4 \frac{A_T}{l^6}$$

- аналитическая оценка

Вклад от вторичной ионизации



Вклад от рекомбинации

$$C_l^{EE} = \frac{\pi}{25} \Delta \eta_r^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k} P_T(k) [h'(k, \eta_r)]^2 \left\{ \frac{(l+2)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} j_{l-2}[(\eta_0 - \eta_r)k] - \right. \\ \left. - \frac{6(l+2)(l-1)}{(2l-1)(2l+3)} j_l[(\eta_0 - \eta_r)k] + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)} j_{l+2}[(\eta_0 - \eta_r)k] \right\}^2$$

$$\frac{\partial h(k, \eta)}{\partial \eta} = h'(k, \eta) = \frac{-3j_2(k\eta)}{\eta}$$

$P_T(k) = A_T$ - считаем спектр масштабно-инвариантным

Вклад от рекомбинации

$$C_l^{EE} = \frac{\pi}{25} \Delta \eta_r^2 A_T \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{9 j_2^2(k \eta_r)}{\eta_r^2} j_l^2[\eta_0 k] \left(\frac{l^2}{\eta_0^2 k^2} - 2 \right)^2$$

$$j_l^2[\eta_0 k] = \frac{1}{2k\eta_0 \sqrt{k^2\eta_0^2 - l^2}} \quad j_2^2(k \eta_r) = \frac{1}{2k^2\eta_r^2}$$

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi \Delta \eta_r^2 A_T}{100 \eta_r^4 \eta_0 l} \int_{l/\eta_0}^\infty \frac{dk}{k^4} \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2\eta_0^2}{l^2} - 1}} \left(\frac{l^2}{\eta_0^2 k^2} - 2 \right)^2$$

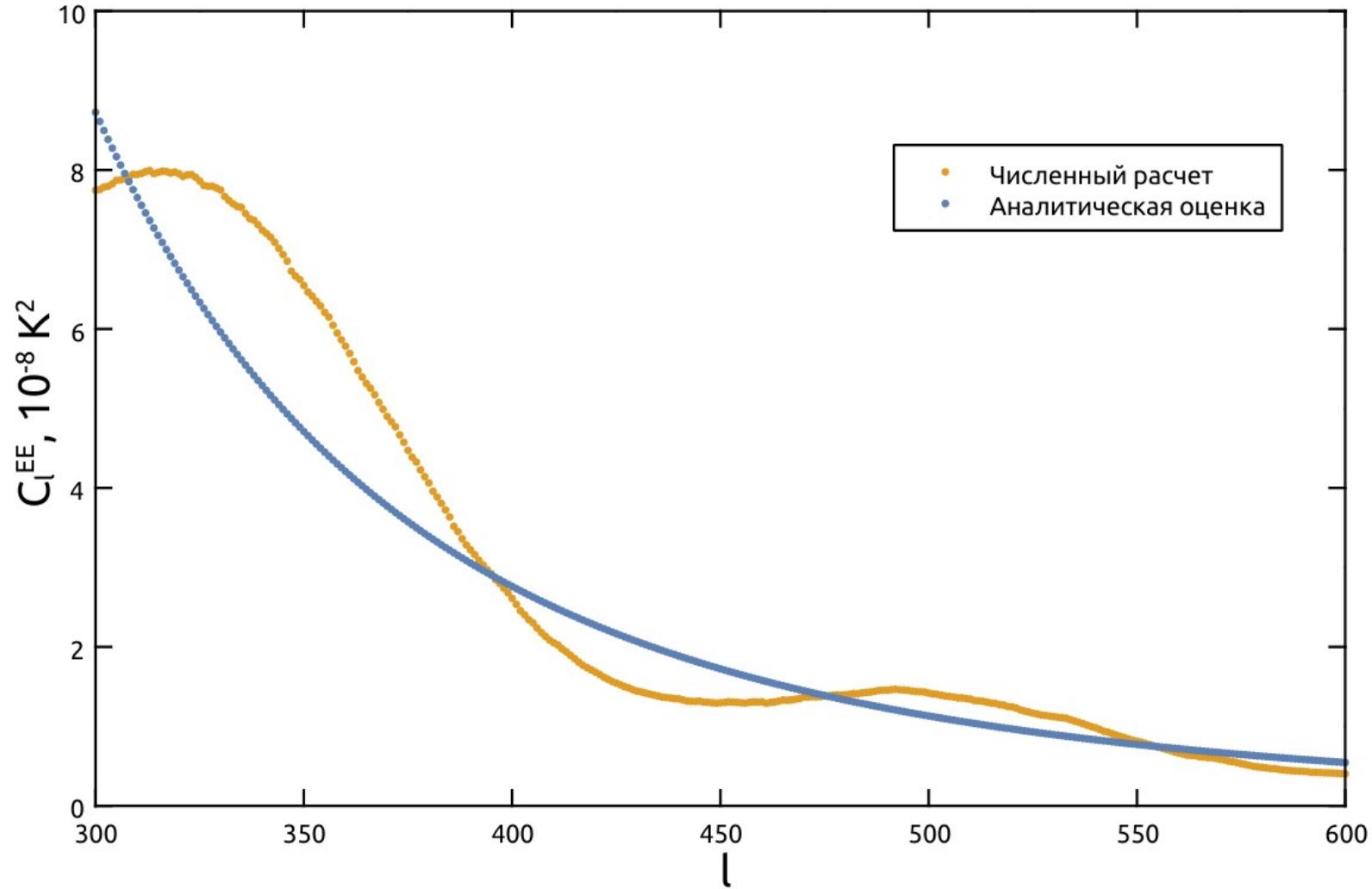
Вклад от рекомбинации

$$\int_{l/\eta_0}^{\infty} \frac{dk}{k^4} \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2 \eta_0^2}{l^2} - 1}} \left(\frac{l^2}{\eta_0^2 k^2} - 2 \right)^2 = \frac{\eta_0^3}{l^3} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^4 \sqrt{u^2 - 1}} \left(\frac{1}{u^2} - 2 \right)^2 = \frac{104 \eta_0^3}{105 l^3} \approx \frac{\eta_0^3}{l^3}$$

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi}{100} \left(\frac{\Delta \eta_r}{\eta_r} \right)^2 \left(\frac{\eta_0}{\eta_r} \right)^2 \frac{A_T}{l^4}$$

- аналитическая оценка

Вклад от рекомбинации



Зависимость от космологических параметров

$$\eta_0 = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M)$$

$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} (1+z)^4}}$$

$$\eta_{rei} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{1+z_{rei}}}$$

$$\tau_{rei} = \frac{\eta_B \sigma_T n_{\gamma,0}}{2 H_0 \sqrt{\Omega_M}} (1+z_{rei})^{\frac{3}{2}}$$

$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma}$ - отношение плотности числа барионов и фотонов

σ_T - томсоновское сечение рассеяния фотона на свободном электроне

$n_{\gamma,0}$ - современная плотность числа реликтовых фотонов

Зависимость от космологических параметров

$$\Delta\eta_r = \frac{2T_r\eta_r}{\Delta_H}$$

Δ_H - энергия связи электрона в атоме водорода на основном уровне

$$\eta_r = \int_{z_r}^{\infty} \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{(1+z)^3 \Omega_M + (1+z)^4 \Omega_{rad}}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right)$$

$$\mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right) = \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}}$$

Зависимость от космологических параметров

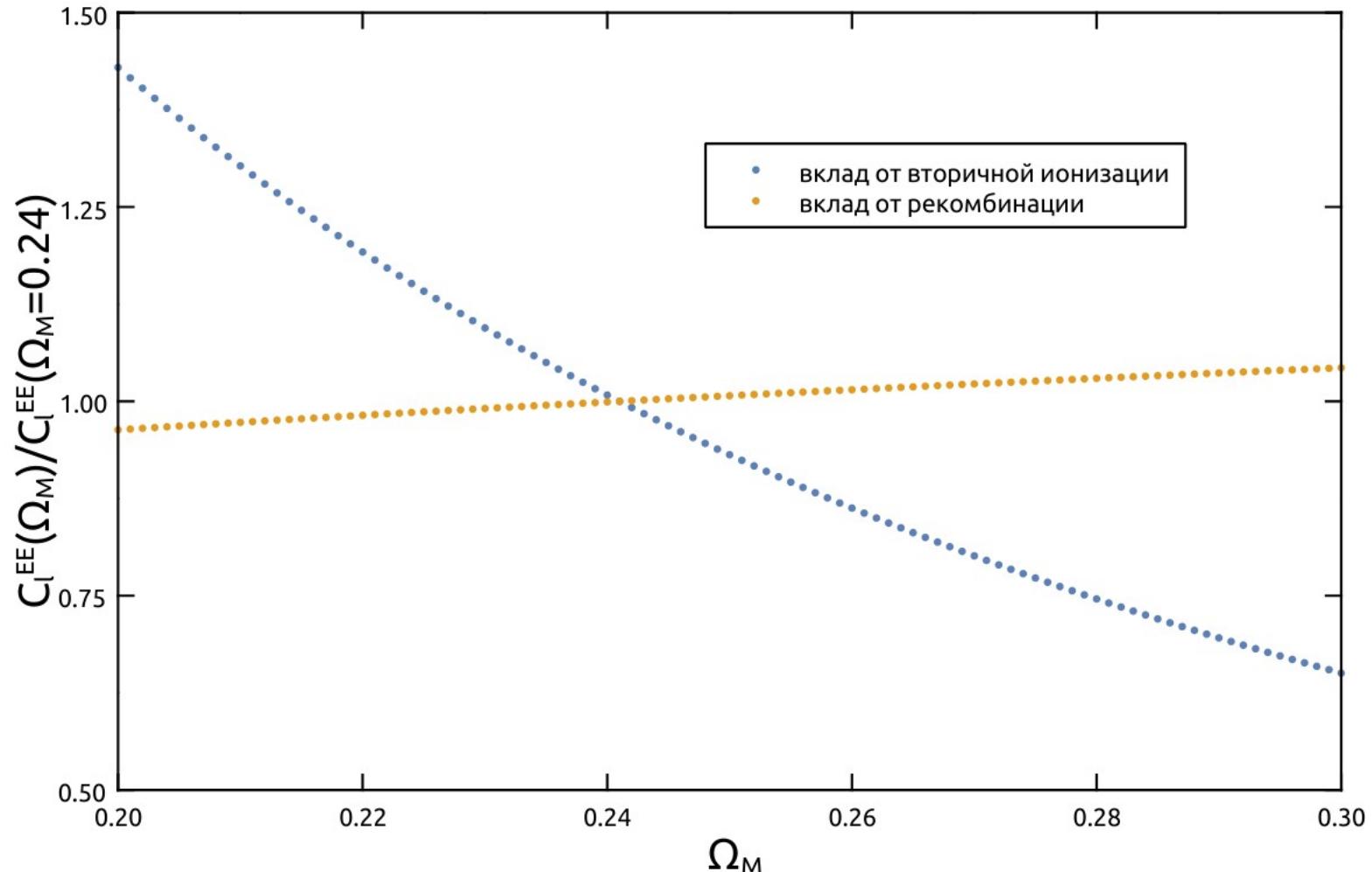
$$C_l^{EE} = \frac{\pi \eta_B^2 \sigma_T^2 n_{\gamma,0}^2}{40 H_0^2 \Omega_M} \left(\sqrt{\frac{1 + z_{rei}}{\Omega_M}} I(\Omega_M) - 1 \right)^4 \frac{A_T}{l^6}$$

- вклад от вторичной ионизации

$$C_l^{EE} = \frac{9\pi T_r^2}{25 \Delta_H^2} \left(\frac{I(\Omega_M)}{\mathcal{F} \left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M} \right)} \right)^2 \frac{A_T}{l^4}$$

- вклад от рекомбинации

Зависимость от космологических параметров



ИТОГИ

- получены аналитические оценки для различных вкладов в поляризацию
- получена зависимость вкладов от космологических параметров
- проведен анализ: вклад от вторичной ионизации более чувствителен к изменению Ω_m , чем вклад от рекомбинации

Список литературы

1. Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков, *Введение в теорию ранней Вселенной: Космологические возмущения. Инфляционная теория.*
2. V. Mukhanov, *CMB-slow or How to Estimate Cosmological Parameters by Hand*